In diesem Online-Material werden die Fragen geklärt, wie weit der Formalismus bei der Entwicklung des Integrals auszuführen ist und wie eine anschauliche Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für Kurse auf erhöhtem Anforderungsniveau erfolgen kann.

Um das Verständnis zu sichern, wird eine tragfähige Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt. Dabei soll von Sachproblemen aus Kontexten wie Zu- und Ablauf sowie Geschwindigkeit und Weg ausgegangen und die Erfahrung mit Grenzprozessen erweitert werden.

Bei der Rekonstruktion von Beständen können Vorgänge betrachtet werden, die sich mithilfe konstanter oder stückweise linearer Funktionen beschreiben lassen. Auf in diesem Zusammenhang gemachten Entdeckungen aufbauend können Stammfunktionen definiert und die Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung schließlich erkannt, formuliert und begründet werden.

Ein Beispiel eines aus Änderungsrate und Anfangsbestand (re-)konstruierten Bestandes kann folgende Aufgabe bieten:

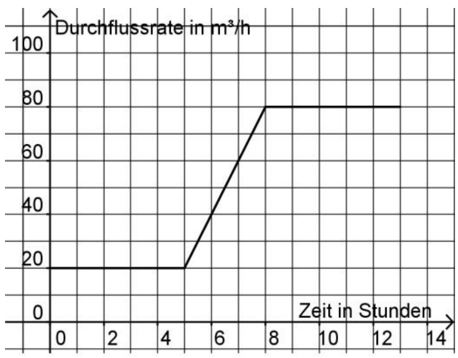
Aufgabe 1:

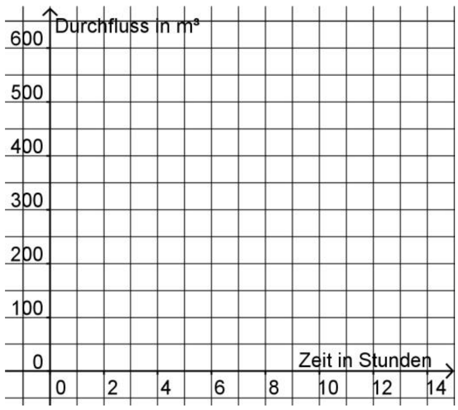
Die Messstelle einer Ölpipeline zeigt zu jedem Zeitpunkt die momentane Durchflussmenge an. Sie wird mit Hilfe eines im Rohr befestigten Propellers bestimmt. Das Bild rechts zeigt ein dazugehöriges Messdiagramm.

a) Ermitteln Sie die Gesamtölmenge, die in dem dargestellten Zeitraum durch die Pipeline fließt.

b) Berechnen Sie die gesamte Ölmenge, die nach jeder Stunde durch die Pipeline geflossen ist, und stellen Sie diese Werte im unteren Diagramm graphisch dar.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung einer Funktion D, die den Durchfluss zu jedem Zeitpunkt t beschreibt.





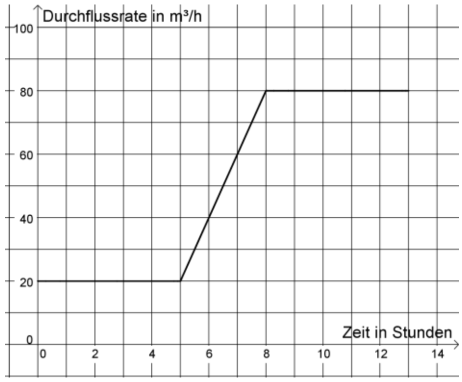
Eine Lösungsskizze wäre etwa:

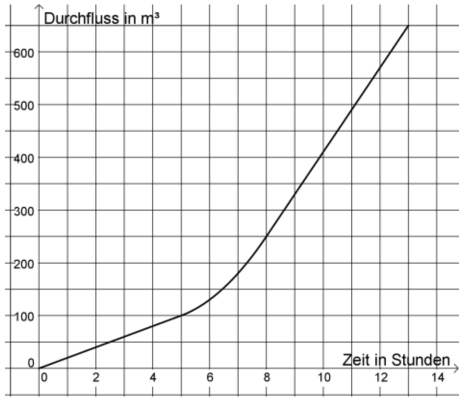
a) Berechnung der Gesamtölmenge

$$5\text{h}\cdot 20\frac{\text{m}^3}{\text{h}} + 3\text{h}\cdot 20\frac{\text{m}^3}{\text{h}} + 3\text{h}\cdot\frac{60}{2}\frac{\text{m}^3}{\text{h}} + 5\text{h}\cdot 80\frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 650\text{m}^3$$

b) Berechnung der gesamten Ölmenge, die nach jeder Stunde durch die Pipeline geflossen ist:

Zeit in Stunden	Durchflussmenge in m^3
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100
6	130
7	180
8	250
9	330
10	410
11	490
12	570
13	650





c) Eine Durchflussfunktion ist $D(t) = \begin{cases} 20\cdot t & \text{für } 0 \le t \le 5 \\ 10\cdot t^2 - 80\cdot t + 250 & \text{für } 5 < t \le 8 \\ 80\cdot t - 390 & \text{für } 8 < t \le 13 \end{cases}$.

Der Graph von D ist im Bild oben dargestellt.

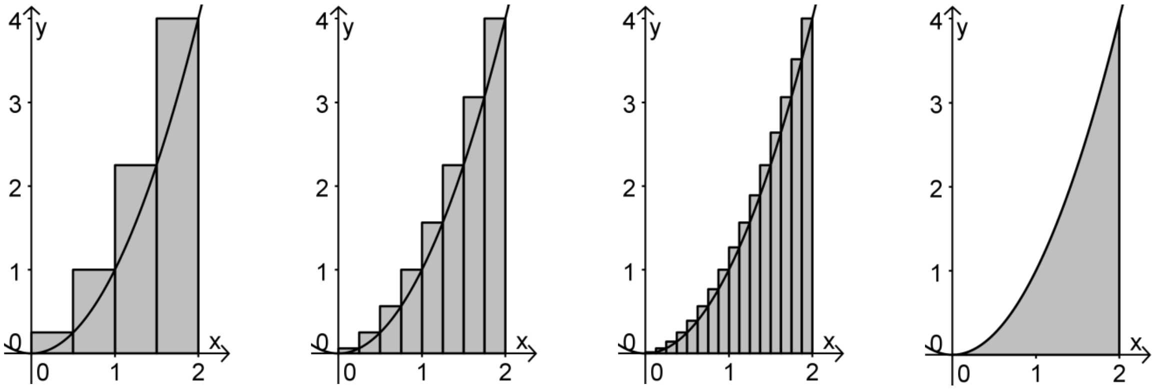
Die in diesem Zusammenhang auftretenden Fragen nach Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktionen stellen eine Verbindung zur Kurvenanpassung darstellen und sollten an passender Stelle bearbeitet werden.

Um das Integral als Grenzwert von Produktsummen zu beschreiben, ist es sinnvoll, die Rekonstruktion auch an Beispielen zu betrachten, bei denen die Berandung nicht stückweise linear ist. Für eine grundsätzliche Klärung der Vorgehensweise reicht eine Beschränkung auf in dem betrachteten Intervall monoton steigende Funktionen mit nicht negativen Funktionswerten aus.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Betrachtet wird der Graph der Funktion im Intervall $[0;2]$.
Schätzen Sie den Flächeninhalt mithilfe sogenannter Obersummen durch Unterteilung in 4, 8, 16 Rechtecke ab.

i. 4 Rechtecke ii. 8 Rechtecke iii. 16 Rechtecke iv. Fläche unter f



Für die Berechnung der Flächeninhalte ergibt sich:

- 4 Rechtecke: $0,5 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 2,25 + 0,5 \cdot 4 = 3,75$
- 8 Rechtecke: 3,1875
- 16 Rechtecke: 2,696618

Eine Veranschaulichung der Berechnung mithilfe entsprechender Werkzeuge unterstützt die Argumentation.
Anschaulich ist klar, dass diese Obersummen bei immer weiterer Verfeinerung der Unterteilung gegen den gesuchten Flächeninhalt unter dem Graphen von f konvergieren.

Die Erfahrungen sollen verallgemeinert werden:

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.
Bestimmen den Flächeninhalt unter dem Graphen von f im Intervall $[0;b]$ für ein beliebiges $b > 0$.
Begründen Sie die aufgeführten Terme.

$$S_n = \Delta x \cdot \left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right) + \ldots + f\left(x_{n-1}\right) + f\left(x_n\right)\right)$$

Für die Funktion f mit $f(x) = x^2$ im Intervall $[0;b]$ bedeutet dies:

$$S_n = \frac{b}{n} \cdot \left(\left(\frac{1 \cdot b}{n}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot b}{n}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n \cdot b}{n}\right)^2\right)$$

$$S_n = \frac{b^3}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

TIPP: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{3} + \frac{n}{6}$

$$S_n = \frac{b^3}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)$$

$$S_n = b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n} + \frac{1}{6 \cdot n^2}\right)$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3} \cdot b^3$.

Die Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen kann entweder einem Tafelwerk oder einem CAS-Rechner entnommen bzw. mitgeteilt werden.
Analoge Überlegungen können für die Untersumme angestellt werden. Damit verbunden sind vertiefende Überlegungen hinsichtlich des Grenzwertes.

Für $S_n = \Delta x \cdot \left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right) + \ldots + f\left(x_{n-1}\right) + f\left(x_n\right)\right)$

kann die Summenschreibweise $S_n = \frac{b}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i \cdot b}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$ eingeführt werden.

Mit ihr oder der ausgeschriebenen Summe wird die Integralschreibweise erläutert:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_0^b x^2 \, dx.$$

Die Frage, wann und wie weit die Grenzprozesse formalisiert werden, kann nicht pauschal beantwortet werden. Zur formalen Beschreibung kann die Limes-Schreibweise oder die Pfeil-Schreibweise verwendet werden. Dabei nimmt die Limes-Schreibweise eher den Grenzwert als Ergebnis eines Grenzprozesses in den Fokus und die Pfeil-Schreibweise legt den Fokus auf den Grenzprozess selbst. Die Schreibweise sollte den Argumentationsweisen der Schülerinnen und Schüler angepasst werden und diese sinnvoll verdeutlichen.

Die streng formale Definition des Grenzwertes ist wenig Verständnis fördernd und sollte nicht eingeführt werden. → vgl. Aussage im OM Kurvenanpassung eA und OM Ableitungen

Die formale Beschreibung wird nicht benötigt, um den Grenzwert zu verstehen. Das anschauliche Verständnis, das die Schülerinnen und Schüler in früheren Schuljahrgängen erwerben (z.B. wenn Terme zu Punktmustern aufgestellt werden), wird in diesem Lernbereich weiter gefestigt.

Die Untersuchungen führen schließlich zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

> Ist die Änderungsratenfunktion f auf dem Intervall $[a;b]$ stetig, so ist die zugehörige Integralfunktion I_a mit $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ dort differenzierbar und es gilt $I'_a(x) = f(x)$.

Diesen Satz gilt es nachzuweisen.

Aufgabe 3:

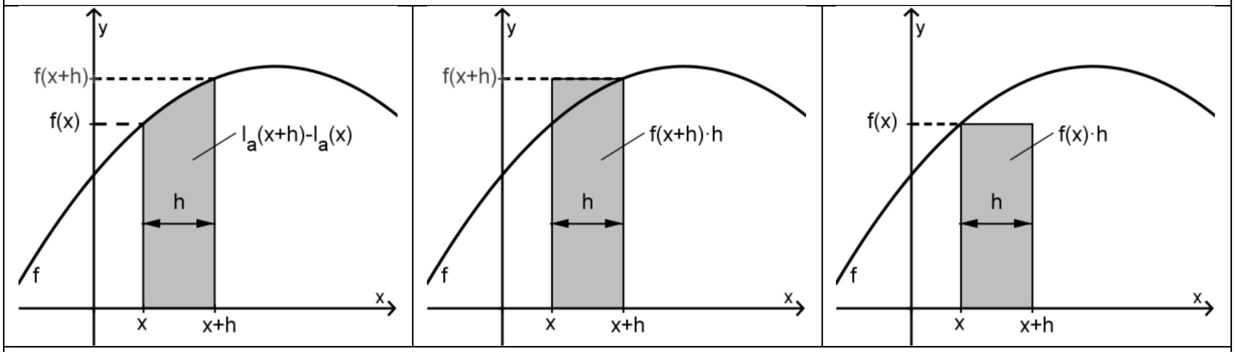
Vollziehen Sie den Beweis nach und erläutern Sie die ihm zugrundeliegende Strategie und die geometrischen Zusammenhänge.

Beweis

Den Zugang zur Ableitung einer Funktion finden wir über den Differenzenquotienten.

Der Differenzenquotient der Integralfunktion I_a an der Stelle x ist: $\frac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h}$.

Der Zähler des Differenzenquotienten $I_a(x+h)-I_a(x)$ kann als Flächenstück unter dem Graphen von f über dem Intervall $[x\,;x+h]$ interpretiert werden.



Dieses Flächenstück lässt sich durch Rechteckflächen abschätzen.
Wenn f monoton wächst, gilt: $f(x)\cdot h \le I_a(x+h)-I_a(x) \le f(x+h)\cdot h$.

Wenn wir die Ungleichung durch h dividieren ($h>0$), erhalten wir: $f(x) \le \frac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h} \le f(x+h)$.

Für $h \to 0$ strebt $f(x+h) \to f(x)$.
Der entsprechende Grenzwert des Differenzenquotienten ist die Änderungsrate $I'_a(x)$ an der Stelle x.

Damit gilt: $f(x) \le I'_a(x) \le f(x)$.

Und somit: $I'_a(x) = f(x)$.