



# Aufgaben für das Fach Mathematik

Eingesetzte Abituraufgaben  
aus dem länderübergreifenden  
Abituraufgabenpool  
2017

**Inhaltsverzeichnis**

**Seite**

Vorbemerkungen ..... 2

1 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 ..... 3

1.1 Analysis ..... 3

1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra ..... 5

1.2.1 Analytische Geometrie ..... 5

1.2.2 Lineare Algebra ..... 7

1.3 Stochastik ..... 9

2 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 ..... 11

2.1 Analysis ..... 11

2.2 Analytische Geometrie / Lineare Algebra ..... 12

2.2.1 Analytische Geometrie ..... 12

2.2.1 Lineare Algebra ..... 13

2.3 Stochastik ..... 14

**Vorbemerkungen**

Für das Fach Mathematik stammen die Aufgaben aus zwei Aufgabenpools, die sich dadurch unterscheiden, dass Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Die Aufgaben der beiden Aufgabenpools sind ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Pro Aufgabe können 5 Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Die Länder wählen für die Prüfungsteilnehmer, welche auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft werden, als gemeinsame Prüfungselemente drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Diese vier Aufgaben umfassen Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik und berücksichtigen die Alternativen vektorielle analytische Geometrie und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen.

Die vorliegenden Aufgaben sollen die Möglichkeiten der Orientierung hinsichtlich der gemeinsamen Prüfungselemente und der gemeinsamen Aufgaben für den schriftlichen Leistungsnachweis über die veröffentlichten Musteraufgaben hinaus erweitern.

Dabei gilt für Niedersachsen die Einschränkung, dass bis zur Abiturprüfung 2016 die Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen als verbindlicher Inhalt auch Gegenstand der Abiturprüfung war und entsprechende Aufgaben für den Pflichtteil ausgewählt werden konnten. Ab der Abiturprüfung 2017 werden Inhalte aus der vektoriellen Analytischen Geometrie gemäß der Alternative A2 der Bildungsstandards Gegenstand der Abiturprüfung sein. Damit können auch Aufgaben mit solchen Inhalten aus dem Aufgabenpool für den Pflichtteil ausgewählt werden.

**1 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1**

**1.1 Analysis**

**A1\_1**

Eine Funktion  $f$  ist durch  $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , gegeben.

- a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion  $f$ . (2 BE)
- b) Die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $S(0|1)$  begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
A1_1		
a)	Aus $f(x) = 0$ folgt $e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \frac{1}{2}$ und somit $2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ als Nullstelle.	2
b)	Aus der Ableitung $f'(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ergibt sich die Tangentensteigung $f'(0) = 1$ . Eine Gerade mit der Steigung 1 schneidet jede Koordinatenachse unter einem Winkel von $45^\circ$ . Damit ist das Dreieck gleichschenkelig.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
A1_1	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)	X			X						X		
b)		X	X	X		X	X			X		

**A1\_2**

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter Luft ermittelt.

Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt  $t$  (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung  $n(t) = 3 \cdot t^2 - 60 \cdot t + 500$  mit  $t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 10$ , beschrieben werden.

- a) Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung. (3 BE)
- b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde  $-30$  beträgt. (2 BE)

	<b>Erwartete Schülerleistungen</b>	<b>BE</b>
A1_2		
a)	Für die mittlere Änderung im Intervall $[0;2]$ gilt: $\frac{n(2) - n(0)}{2} = \frac{392 - 500}{2} = -54$ . Im Mittel nimmt die Anzahl der Pollen in diesem Zeitraum um 54 pro Kubikmeter und Stunde ab.	3
b)	Aus $n'(t) = 6 \cdot t - 60 = -30$ ergibt sich $t = 5$ . Der gesuchte Zeitpunkt ist 5 Stunden nach Beginn der Messung erreicht.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
A1_2	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)		X		X				X		X	X	
b)	X	X		X				X		X	X	

**1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra**

**1.2.1 Analytische Geometrie**

**G1\_1**

Ein Fahnenmast ragt auf einem ebenen, horizontalen Platz 6 m vertikal nach oben. In einem kartesischen Koordinatensystem wird dieser Platz durch die  $x_1x_2$ -Ebene und die Spitze des Fahnenmasts durch den Punkt  $S(0|0|6)$  modelliert. Der Vektor  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  gibt die Richtung der Sonnenstrahlen zum Zeitpunkt  $t_0$  an.

- a) Bestimmen Sie die Länge des Schattens, den der Fahnenmast zum Zeitpunkt  $t_0$  auf den Platz wirft. (3 BE)
- b) Zu einem anderen Zeitpunkt  $t_1$  wird die Richtung der Sonnenstrahlen durch den Vektor  $\vec{v}_1$  dargestellt. Beschreiben Sie einen Weg, wie man rechnerisch ermitteln kann, ob die Sonne zum Zeitpunkt  $t_1$  höher steht als zum Zeitpunkt  $t_0$ . (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_1		
a)	<p>Für den Schnittpunkt der Geraden mit der Gleichung <math>\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}</math> mit der <math>x_1x_2</math>-Ebene gilt <math>s = 3</math>, der Schnittpunkt hat also die Koordinaten <math>(-9 12 0)</math>.</p> $\left  \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right  = 15$ <p>Die Schattenlänge beträgt 15 m.</p>	3
b)	Analog zu a) wird die Schattenlänge zum Zeitpunkt $t_1$ berechnet. Ist der Schatten zum Zeitpunkt $t_1$ kürzer als zum Zeitpunkt $t_0$ , so steht die Sonne höher, sonst nicht.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
G1_1	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)		X	X				X	X		X		
b)		X	X					X			X	

**G1\_2**

Das Dreieck ABC mit den Punkten A(3|3|3), B(6|7|3) und C(2|10|3) ist im Punkt B rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung  $z = 3$ .

- a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt  $\frac{25}{2}$  besitzt. (2 BE)
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass das Volumen der Pyramide ABCD gleich 25 ist. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_1		
a)	$ \overline{BA}  =  \overline{BC}  = \sqrt{25} = 5$ Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$ .	2
b)	Aus $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} \cdot h = 25$ folgt $h = 6$ . Die Koordinaten eines Punktes D sind z. B. (3 3 9).	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
G1_2	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)	X	X	X				X			X		
b)	X	X	X			X	X			X		

**1.2.2 Lineare Algebra**

**LA1\_1**

Untersucht werden die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 &= 13 \\ x_2 + 2 \cdot x_3 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(2 BE)

b) Betrachtet wird das folgende Gleichungssystem mit einem Parameter  $p \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 4 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &= 5 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + p \cdot x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Geben Sie einen Wert von  $p$  an, für den das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Zeigen Sie, dass es keinen Wert von  $p$  gibt, für den das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

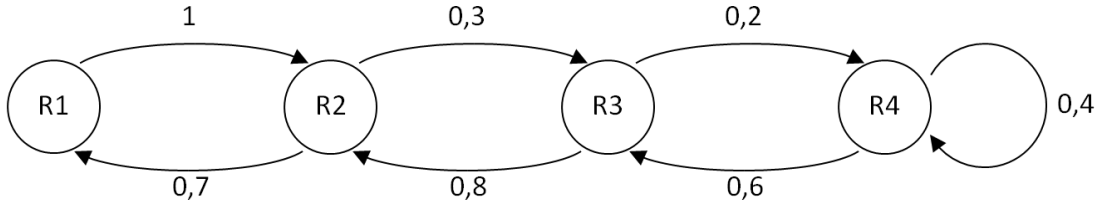
(3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA1_1		
a)	Subtraktion der dritten von der zweiten Zeile liefert $x_3 = 2$ , damit ergibt sich aus der letzten Zeile $x_2 = 1$ und damit aus der ersten Zeile $x_1 = 5$ . Lösungsmenge: $\{(5;1;2)\}$	2
b)	Für $p = 1$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Für $p \neq 1$ erhält man durch Subtraktion der ersten von der dritten Gleichung $x_3 = 0$ . Damit führen die ersten beiden Gleichungen zu einem Widerspruch und das Gleichungssystem hat keine Lösung.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
L1_1	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)	X									X		
b)	X					X	X			X		

LA1\_2

In einem Labor wird das Wechseln von Ratten zwischen vier miteinander verbundenen Räumen (R1, R2, R3 und R4) beobachtet. Das Wechseln der Ratten von einem Beobachtungszeitpunkt zum nächsten lässt sich durch das abgebildete Übergangsdiagramm beschreiben.



- a) Geben Sie eine zugehörige Übergangsmatrix an. (2 BE)
- b) Zu Beginn einer Beobachtung sind 50 Ratten in R1, die übrigen drei Räume sind leer. Eine der folgenden Abbildungen beschreibt die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Ratten in R1.

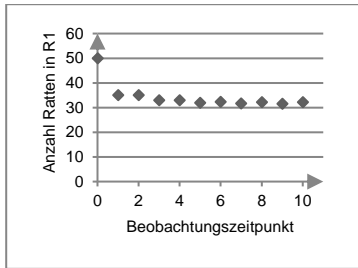


Abbildung A

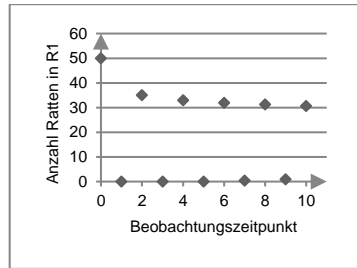


Abbildung B

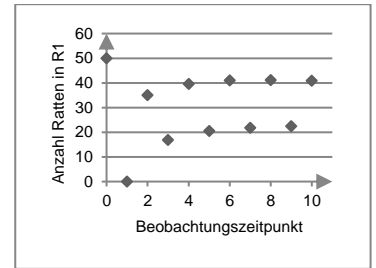


Abbildung C

Geben Sie an, um welche Abbildung es sich handelt. Begründen Sie Ihre Angabe.

(3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA1_2		
a)	Eine mögliche Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$	2
b)	Die richtige Abbildung ist Abbildung B. Aus dem Graphen ergibt sich: Nach der ersten Zeiteinheit sind alle Ratten in R2. Daher sind nach der zweiten Zeiteinheit keine Ratten in R2. Folglich sind nach der dritten Zeiteinheit keine Ratten in R1. Nur in Abbildung B ist R1 nach der dritten Zeiteinheit leer.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
L1_2	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)	X							X	X	X		
b)	X					X		X	X			



**1.3 Stochastik**

**S1\_1**

Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt  $p$ .

a) Interpretieren Sie den Term  $(1-p)^7$  im Sachzusammenhang. (2 BE)

b) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht.  
Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird. (1 BE)

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %.  
Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war.  
Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.“  
Beurteilen Sie die Aussage von Felix. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S1_1		
a)	Mit dem Term kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass der blaue Sektor bei sieben Drehungen kein einziges Mal getroffen wird.	2
b)	$\binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$	1
c)	Die Aussage ist falsch, da die Wahrscheinlichkeit für „trifft den gelben Sektor“ bei jedem einzelnen Spiel gleich ist, unabhängig von den bisherigen Versuchsausgängen.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
S1_1	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)					X	X	X	X				
b)	X				X			X		X		
c)					X	X		X			X	

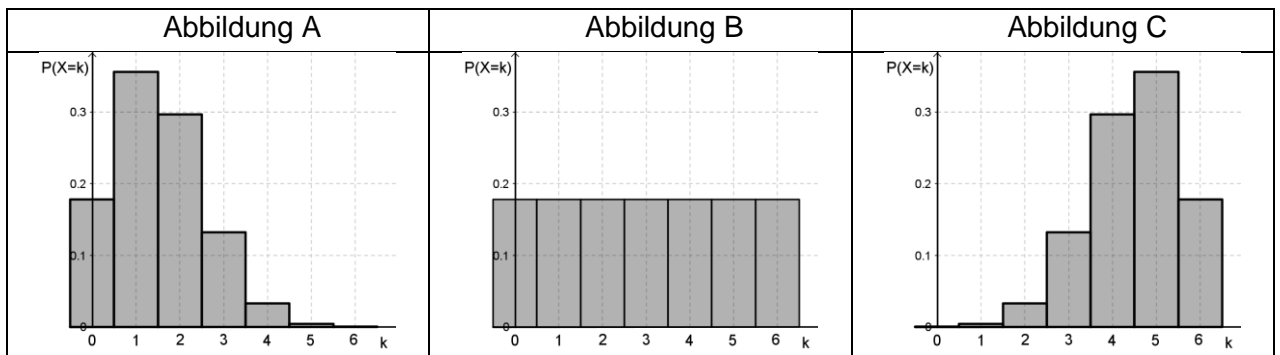
**S1\_2**

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

- a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.  
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist. (2 BE)

- b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße  $X$  gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten.

Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße  $X$  dar.



- Geben Sie an, welche Abbildung dies ist.  
Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S1_2		
a)	Ein möglicher Term: $\left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$	2
b)	Abbildung A zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße $X$ . Begründung: $X$ ist binomialverteilt mit $n = 6$ und $p = \frac{1}{4}$ . Daraus folgt, dass $E(X) = 1,5$ gilt. Abbildung B zeigt eine Gleichverteilung und kommt deshalb nicht in Frage. Abbildung C zeigt eine Verteilung mit einem Erwartungswert größer als 1,5 und kommt daher ebenfalls nicht in Frage.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
S1_2	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)					X			X		X		
b)		X		X	X	X		X	X			

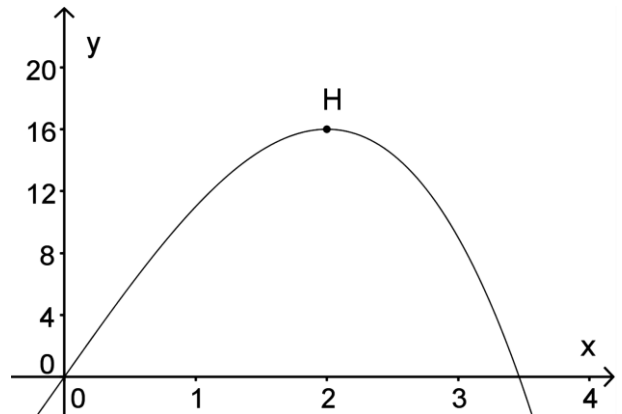
**2 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2**

**2.1 Analysis**

**A2\_1**

Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = -x^3 + 12 \cdot x$ . Die Abbildung zeigt den Graphen von  $f$  sowie dessen Hochpunkt  $H(2|16)$ .

- a) Der Graph von  $f$ , die  $x$ -Achse und die Gerade mit der Gleichung  $x = 2$  schließen im Bereich  $0 \leq x \leq 2$  eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt. (2 BE)
- b) Die Gerade  $g$  verläuft durch den Punkt  $H$  und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von  $f$ , die  $y$ -Achse und die Gerade  $g$  schließen im Bereich  $0 \leq x \leq 2$  eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden  $g$  mit der  $y$ -Achse. (3 BE)



	Erwartete Schülerleistungen	BE
A2_1		
a)	$\int_0^2 f(x) dx = \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{12 \cdot x^2}{2} \right]_0^2 = 20$	2
b)	Die $y$ -Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 16$ und der Graph von $f$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt 12 ein. Daraus folgt, dass die $y$ -Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 16$ und die Gerade $g$ eine Fläche mit dem Inhalt 8 einschließen. Die Koordinaten des Schnittpunktes mit der $y$ -Achse sind $(0 24)$ .	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
A2_1	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)		X	X	X					X	X		
b)	X	X	X	X		X	X				X	

**2.2 Analytische Geometrie / Lineare Algebra**

**2.2.1 Analytische Geometrie**

**G2\_1**

Gegeben ist die Ebene  $E : 2 \cdot x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 = -18$ .

- a) Der Schnittpunkt von E mit der  $x_1$ -Achse, der Schnittpunkt von E mit der  $x_2$ -Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.  
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. (2 BE)
- b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G2_1		
a)	Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind $(-9 0 0)$ bzw. $(0 -18 0)$ . Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$ .	2
b)	Jeder Normalenvektor von E lässt sich in der Form $r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $r \neq 0$ darstellen. Ist ein derartiger Vektor der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E, so gilt: $2 \cdot 2 \cdot r + r - 2 \cdot (-2 \cdot r) = -18$ . Daraus folgt $r = -2$ . Der gesuchte Vektor ist somit $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards													
G2_1	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen							
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6		
a)	X	X	X				X			X			
b)	X		X				X			X			

**2.2.1 Lineare Algebra**

**L2\_1**

Betrachtet werden stochastische Matrizen, d. h. quadratische Matrizen, deren Spaltensummen jeweils gleich eins sind und in denen alle Elemente größer oder gleich null sind.

- a) Bestimmen Sie einen Vektor  $\vec{v}$  mit  $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  derart, dass für die Matrix M mit

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix} \text{ gilt: } M \cdot \vec{v} = \vec{v}. \quad (2 \text{ BE})$$

- b) Zeigen Sie:

Ist N eine stochastische  $2 \times 2$  - Matrix und  $\vec{u}$  ein Vektor mit der Spaltensumme 5, dann ist auch  $N \cdot \vec{u}$  ein Vektor mit der Spaltensumme 5. (3 BE)

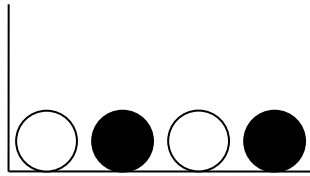
	<b>Erwartete Schülerleistungen</b>	<b>BE</b>
L2_1		
a)	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow v_y = 2 \cdot v_x$ <p>z. B. <math>\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}</math></p>	2
b)	<p>Mit <math>N = \begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix}</math> und <math>\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}</math> folgt <math>N \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Die Spaltensumme ist damit</p> $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot x + d \cdot y = x \cdot (a + c) + y \cdot (b + d) = x + y = 5,$ <p>da laut Voraussetzung gilt: <math>a + c = 1, b + d = 1</math> und <math>x + y = 5</math>.</p>	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
L2_1	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)	X						X			X		
b)	X						X			X	X	

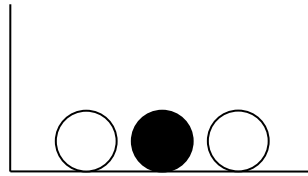
2.3 Stochastik

S2\_1

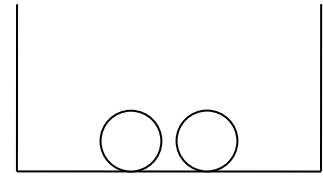
Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



Urne A



Urne B



Urne C

- a) Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden. (2 BE)
- b) Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:  
 Es wird zunächst ein Einsatz von 1 € eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt. Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S2_1		
a)	Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ .	2
b)	$P(\text{Auszahlung}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ Aus dem Ansatz $\frac{5}{18} \cdot (x - 1) + \frac{13}{18} \cdot (-1) = 0$ folgt $x = \frac{18}{5} = 3,6$ . Die Auszahlung muss somit 3,60 € betragen.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

Bezug zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards												
S2_1	Leitideen					Allgemeine mathematische Kompetenzen						
	L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	
a)					X		X	X		X		
b)	X	X		X	X		X	X		X		